Bonusmaterial 1: Differentialformen und Integralsätze

1. Differentialformen: Betrachte eine Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

$x_1, \to x_n$ Variable

$dx_1, \to dx_n$

Definition: Ein Ausdruck

$$(*) \qquad \omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} f_{i_1,\ldots,i_r}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$$

mit Funktionen $f_{i_1,\ldots,i_r} : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst eine *Differentialform vom Grad r auf Ω.*

Bemerkung: Für den Vektorraum $V := \mathbb{R}^n$ identifizieren wir das Symbol dx_i mit der Linearform

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_i.$$

Dann ist $dx_1, \ldots, dx_n$ die zu der Standardbasis von V duale Basis des Dualraums $V^\vee$, und eine Differentialform vom Grad r ist eine Funktion $\Omega \to \bigwedge^r(V^\vee)$.

Spezialfall: Eine Differentialforma vom Grad $r = 0$ ist einfach eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Bemerkung: Jede Differentialform vom Grad $> n$ ist Null.

2. Ableitung: Der Einfachheit halber betrachten wir nur beliebig oft differenzierbare, das heisst C^∞-Abbildungen, anstatt C^k-Abbildungen für beliebiges k. Sei zunächst Ω offen in $\mathbb{R}^n$. $\ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Definition: Die Ableitung einer C^∞-Funktion f

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

$$df \;:=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i$$

ist eine C^∞-Differentialform vom Grad 1.

Definition: Für jede C^∞-Differentialform ω wie in $(*)$ sei

$$\boxed{d\omega \;:=\; \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} df_{i_1,\ldots,i_r} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}.}$$

Dies ist eine C^∞-Differentialform vom Grad $r+1$.

Proposition: Für jede C^∞-Differentialform ω wie in $(*)$ gilt

$$\boxed{dd\omega \;= 0.}$$

Bsp.: $ddf = d\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i\right) = \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \cdot dx_j\right) \wedge dx_i$

$= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \underbrace{dx_j \wedge dx_i}_{=0 \text{ für } i=j} = 0$ weil $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

3. Parametrisierung: Betrachte eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^m$ und eine Funktion

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{x_i} \mathbb{R}, \qquad \underline{x} \mapsto x_i$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} : B \to \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Wir nehmen an, dass alle Koeffizientenfunktionen φ_i auf einer Umgebung von B beliebig oft differenzierbar sind, so dass ihre Ableitungen $d\varphi_i$ existieren.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "f\circ\varphi"'] & \Omega \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Definition: Für jede C^∞-Differentialform ω wie in $(*)$ setzen wir

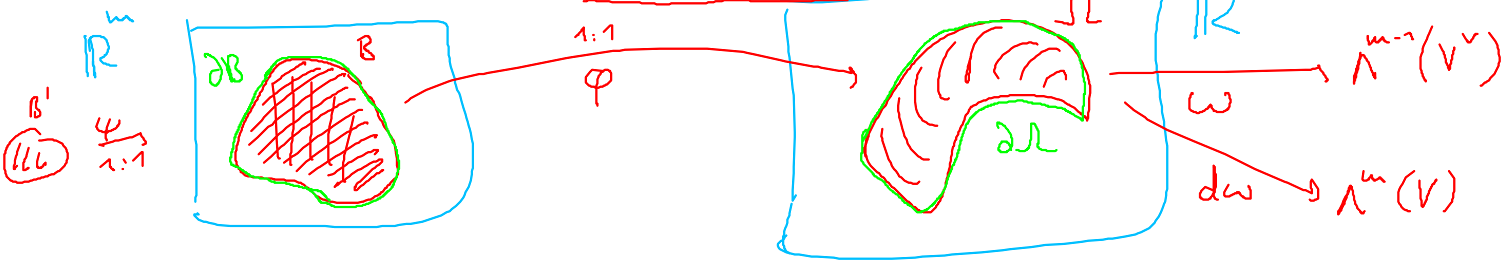
$$\boxed{\varphi^*\omega \ := \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} (f_{i_1,\ldots,i_r} \circ \varphi)\, d\varphi_{\cancel{1}\, i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{\cancel{n}\, i_r}.}$$

$$dx_i \mapsto d(x_i \circ \varphi) = d\varphi_i$$

Proposition: Ist ω differenzierbar, so gilt

$$\boxed{d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega).}$$

4. Skalares Integral: Sei nun Ω eine „schöne“ kompakte m-dimensionale Teilmenge von $\mathbb{R}^m$, und φ eine „schöne“ Parametrisierung von Ω. Dafür soll B kompakt mit schönem Rand ∂B und gleich dem Abschluss seines Inneren sein, und $\varphi\colon B \to \Omega$ soll fast überall bijektiv sein.



Für jede Differentialform ω vom Grad m auf Ω ist dann $\varphi^*\omega$ eine Differentialform vom Grad m auf B, also von der Form

$$g \cdot \underbrace{dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m}.$$

← Basis von $\Lambda^m(V^\vee)$.

Definition:

$$\int_\Omega \omega \;:=\; \int_B g \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m \;:=\; \int_{x_m} \cdots \int_{x_1} g \cdot dx_1 \cdots dx_m.$$

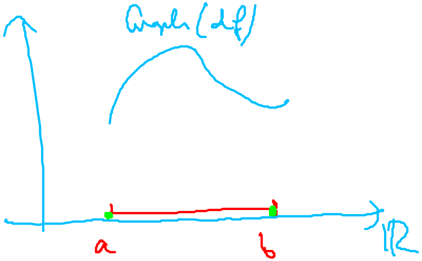
Proposition: Dies hängt nur von Ω und ω sowie von der durch φ induzierten Orientierung von Ω ab, und ist ansonsten von der Parametrisierung unabhängig. Insbesondere ändert es sich nicht, wenn wir die Parametrisierung φ durch $\varphi \circ \psi$ ersetzen für $\psi\colon B' \xrightarrow{\sim} B$ mit $\det(\nabla\psi) > 0$ überall.

4. Integralsatz: Sei Ω wie oben und zusätzlich $\partial\Omega = \varphi(\partial B)$ eine „schöne“ $m-1$-dimensionale Teilmenge. Sei ω jetzt eine C^∞-Differentialform vom Grad $m-1$. Dann ist $d\omega$ eine C^∞-Differentialform vom Grad m.

Satz von Stokes: Es gilt

$$\boxed{\int_\Omega d\omega \overset{!}{=} \int_{\partial\Omega} \omega.}$$

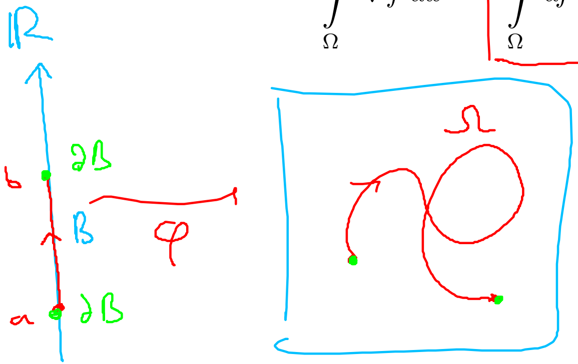
Spezialfall $m = n = 1$: Hauptsatz der eindimensionalen Differential- und Integralrechnung: Betrachte ein Intervall $\Omega = [a, b]$ mit $a < b$ und eine C^∞-Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann gilt



$$\int_a^b \frac{df}{dx}\, dx = \boxed{\int_{[a,b]} df \overset{!}{=} \int_{\partial[a,b]} f} = f(b) - f(a).$$

Spezialfall $m = 1 \leqslant n$ Kurvenintegral: Betrachte ein Intervall $B = [a, b]$ mit $a < b$ und eine Parametrisierung $\varphi \colon B \twoheadrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ einer Kurve. Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ die Einschränkung einer C^∞-Funktion. Dann gilt

$$\int_\Omega \nabla f \cdot d\vec{x} = \boxed{\int_\Omega df \overset{!}{=} \int_{\partial\Omega} f} = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)).$$



Spezialfall $m = n \geqslant 1$ **Divergenzsatz:** Seien $B = \Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit nichtleerem Inneren und $\varphi = \mathrm{id}$, und sei $F = (F_1, \ldots, F_r)^T$ ein Vektorfeld auf Ω, also eine C^∞-Funktion $\Omega \to \mathbb{R}^n$. Zu diesem assoziieren wir die Differentialform

weglassen

$$\omega \;=\; \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot (-1)^i \cdot \underbrace{dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n}_{\text{Basis von } \Lambda^{n-1}(V^\vee)}.$$

Für diese gilt

$$d\omega = \sum_i dF_i \cdot (-1)^i \wedge dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n$$

$$dF_i := \sum_j \frac{\partial F}{\partial x_j} dx_j$$

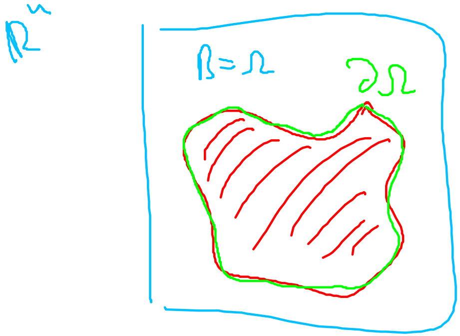
$$d\omega \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{dx_i}\right) \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge \ldots \wedge dx_n \;=\; (\mathrm{div}\, F) \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge \ldots \wedge dx_n$$

$$d\omega = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} (-1)^i dx_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n$$

und

$$\int_\Omega (\mathrm{div}\, F)\, d\mathrm{vol} \;=\; \boxed{\int_\Omega d\omega \;\overset{!}{=}\; \int_{\partial\Omega} \omega} \;=\; \int_{\partial\Omega} F \cdot dS,$$

wobei dS (für "Surface") das von dem Standard-Skalarprodukt induzierte $(n-1)$-dimensionale Volumenelement auf $\partial\Omega$ ist.



5. Der Spezialfall $n = 3$**:** Betrachte eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, eine C^∞-Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, und zwei C^∞-Vektorfelder $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ und $G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^3$. Für diese definiert man

T ?

$$\textit{Gradient} \text{ von } f: \quad \operatorname{grad} f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$$

$$\textit{Rotation} \text{ von } F: \quad \operatorname{rot} F := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{dx_2} - \frac{\partial F_2}{dx_3} \\ \frac{\partial F_1}{dx_3} - \frac{\partial F_3}{dx_1} \\ \frac{\partial F_2}{dx_1} - \frac{\partial F_1}{dx_2} \end{pmatrix}$$

$$\textit{Divergenz} \text{ von } G: \quad \operatorname{div} G := \frac{\partial G_1}{\partial x_1} + \frac{\partial G_2}{\partial x_2} + \frac{\partial G_3}{\partial x_3}$$

$$d\omega = \sum_{i=1}^{3} dF_i \wedge dx_i = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \cdot dx_j \wedge dx_i = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 + \ldots$$

Assoziiert man zu F und G die Differentialformen

$$\begin{aligned} \omega &:= F_1\,dx_1 + F_2\,dx_2 + F_3\,dx_3, \\ \pi &:= G_1\,dx_2 \wedge dx_3 - G_2\,dx_1 \wedge dx_3 + G_3\,dx_1 \wedge dx_2, \end{aligned}$$

so gilt

$$\begin{aligned} F = \operatorname{grad} f &\iff df = \omega, \\ G = \operatorname{rot} F &\iff d\omega = \pi, \\ f = \operatorname{div} G &\iff d\pi = f\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

Somit bedeuten

$$\begin{aligned} ddf = 0 &\iff \operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0, \\ dd\omega = 0 &\iff \operatorname{div}\operatorname{rot} F = 0. \end{aligned}$$

Satz von Stokes:

$$\int\limits_{\Omega} (\operatorname{rot} F)\,dS = \int\limits_{\Omega} (\nabla \times F)\,dS = \boxed{\int_{\Omega} d\omega \overset{!}{=} \int_{\partial\Omega} \omega} = \int_{\partial\Omega} F \cdot d\vec{x}.$$

Bonusmaterial 2: Unendlich-dimensionale Vektorräume

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

Erinnerung: Ein K-Vektorraum, der ein endliches Erzeugendensystem besitzt, heisst *endlich erzeugt.*

Satz 1: Für jede Teilmenge $S \subset V$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) S ist eine Basis von V.

(b) S ist ein minimales Erzeugendensystem von V.

(c) S ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V.

Satz 2: Für jedes Erzeugendensystem E von V und jede linear unabhängige Teilmenge $L \subset E$ existiert eine Basis B von V mit $L \subset B \subset E$.

Folge 3: (a) Jedes Erzeugendensystem von V enthält eine Basis von V. $L = \emptyset$

(b) Jede linear unabhängige Teilmenge von V lässt sich zu einer Basis von V erweitern. $E = V$

(c) Jeder Vektorraum besitzt eine Basis. $L = \emptyset,\ E = V.$

In §4.6 hatten wir Satz 1 und die Implikation „Satz 2 $\Rightarrow$ Folge 3" allgemein, den Satz 2 aber nur für V endlich erzeugt bewiesen. Der Spezialfall $L = \varnothing$ von Satz 2 wurde in der Übungsaufgabe 21 der Vorlesung „Grundstrukturen" gezeigt.

Beweis: $\mathcal{S} := \{ S \mid L \subset S \subset E,\ S \text{ linear unabhängig} \} \subset \mathcal{P}(E)$

$L \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S} \neq \emptyset$

partiell geordnet via $\subset$.

$\mathcal{K} \subset \mathcal{S}$ nichtleere Kette: Setze $S' := \bigcup_{S \in \mathcal{K}} S \Rightarrow L \subset S' \subset E$.

Beh.: S' lin. unabh. Bew.: Seien $s_1, \dots, s_n \in S'$ paarweise verschieden, $\sum k_i s_i = 0$, $k_i \in K$ nicht alle $= 0$.

$\forall i\ \exists S_i \in \mathcal{K}: s_i \in S_i$. $\mathcal{K}$ totalgeordnet $\Rightarrow \exists j: \forall i: S_i \subset S_j$.

$\Rightarrow$ alle $s_i \in S_j \Rightarrow S_j$ lin. abhängig. $\lightning$. qed

Lemma von Zorn $\Rightarrow \exists\, S \in \mathcal{S}$ maximal.

Beh.: S ist Erzeugendensystem $\Rightarrow$ Basis.

Bew.: $\forall e \in E \setminus S$: $\left.\begin{array}{l} S \subsetneq S \cup \{e\} \Rightarrow \text{lin. abhängig.} \\ S \text{ lin. unabhängig} \end{array}\right\} \Rightarrow e \in \langle S \rangle$.

$\Rightarrow E \subset \langle S \rangle \Rightarrow V = \langle E \rangle = \langle S \rangle$. qed.

qed.

In der Vorlesung „Grundstrukturen“ wurde der allgemeine Begriff der Kardinalzahl und der Kardinalität $|X|$ einer Menge X eingeführt. Dort wurde auch gezeigt:

Satz 4: (a) Für je zwei Mengen X und Y ist $|X| = |Y|$ äquivalent zu $|X| \leqslant |Y| \leqslant |X|$.

(b) Für jede unendliche Menge X gilt $|X| = |X \times \mathbb{Z}|$. ✱

(c) Für jede unendliche Menge X gilt $|X| = \left|\bigcup_{n\geqslant 0} X^n\right|$. ✱ Menge der endlichen Folgen in X.

Satz 5: Für je zwei Basen B, B' eines Vektorraums V gilt $|B| = |B'|$.

Folge 6: Die *Dimension* eines allgemeinen Vektorraums V ist durch $\dim_K(V) := |B|$ für eine beliebige Basis B von V als Kardinalzahl eindeutig definiert.

Beweis: Sei B unendlich.

$\forall\, b' \in B'$ schreibe $\boxed{b' = \sum_{i=1}^{n} k_i b_i}$ für $n \geq 0$, $k_i \in K$, $b_i \in B$.

Assoziiere zu b' das Tupel $(b_1, \dots, b_n) \in B^n$.

$\leadsto$ Abbildung $B' \xrightarrow{f} \bigcup_{n\geq 0} B^n$.

Beh.: $\forall\, (b_1, \dots, b_n) = \underline{b} \in B^n$: $f^{-1}(\underline{b})$ endlich.

Bew.: Alle $b' \in f^{-1}(\underline{b})$ liegen in $\langle b_1, \dots, b_n \rangle$.
Die sind lin. unabhängig. endlich dimensional.
$\Rightarrow$ endlich. qed.

Nummeriere $f^{-1}(\underline{b})$ durch.

$\to$ Injektion $f^{-1}(\underline{b}) \hookrightarrow \mathbb{Z}$.

Insgesamt Injektion

$$B' \hookrightarrow \Big(\bigcup_{n\geq 0} B^n\Big) \times \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow |B'| \leq \Big|\underbrace{\Big(\bigcup_{n\geq 0} B^n\Big)}_{\text{unendlich}} \times \mathbb{Z}\Big| = \Big|\bigcup_{n\geq 0} B^n\Big| = |B|$$

Analog $|B| \leq |B'|$.

$\Rightarrow |B| = |B'|$. qed

Satz 7: Für jeden K-Unterraum $V' \subset V$ gilt

$$\dim_K(V) \;=\; \dim_K(V') + \dim_K(V/V').$$

Satz 8: Für jede lineare Abbildung von K-Vektorräumen $f\colon V \to W$ gilt

$V/\mathrm{Kern}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bild}(f)$

$$\dim_K(V) \;=\; \dim_K \mathrm{Kern}(f) + \dim_K \mathrm{Bild}(f).$$

Insbesondere ist $\dim \mathrm{Kern}(f) \leqslant \dim(V)$ und $\dim \mathrm{Bild}(f) \leqslant \dim(V)$.

Vorsicht 9: Für V unendlichdimensional folgt aus $\dim_K(V') = \dim_K(V)$ nicht schon $V' = V$.

Schliesslich haben wir in §5.10 gezeigt:

Satz 10: Für jeden endlich-dimensionalen K-Vektorraum V gilt $\dim_K(V) = \dim_K(V^\vee)$.

Jetzt beweisen wir dazu:

Satz 11: Für jeden unendlich-dimensionalen K-Vektorraum V gilt $\dim_K(V) < \dim_K(V^\vee)$.

Bidualraum.

Bemerkung 12: In §5.10 hatten wir einen natürlichen injektiven Homomorphismus $V \hookrightarrow (V^\vee)^\vee$ konstruiert. Wegen Satz 10 ist dieser ein Isomorphismus falls $\dim_K(V) < \infty$ ist. Im unendlich-dimensionalen Fall folgt aus Satz 11 nun schon direkt $\dim_K(V) < \dim_K(V^\vee) < \dim_K((V^\vee)^\vee)$; allein darum kann dieser Homomorphismus also kein Isomorphismus sein.

Lemma 13: Für jeden unendlich-dimensionalen K-Vektorraum V gilt $|V| = \max\{|K|, \dim_K(V)\}$.

Lemma 14: Für jeden unendlich-dimensionalen K-Vektorraum V gilt $|V^\vee| = \dim_K(V^\vee)$.

Beweis: (Lemma 14 $\Rightarrow$ Satz 11) Wähle Basis B von V.

$K^{(B)} = \{(x_b)_{b\in B} \mid$ Für fast alle $b \in B$ ist $x_b = 0\} \xrightarrow{\sim} V$, $(x_b)_b \mapsto \sum' x_b b$.

$\cap$

$K^B = \{$Abbildungen $B \to K\} \xleftarrow{\sim} V^\vee$, $(\ell(x_b))_b \mapsfrom \ell$

$|V^\vee| = |K^B| \geq |\{0,1\}^B|$

$\quad\; \| \qquad\qquad\qquad \|$

$\dim_K(V^\vee) \qquad |\mathcal{P}(B)|$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\; \vee$

$\qquad\qquad\qquad\qquad |B|$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\; \|$

qed. $\qquad\qquad\quad \dim(V)$

Beweis Lemma 13: Sei B eine Basis von V.

$\Rightarrow B \subset V \Rightarrow \dim(V) = |B| \leq |V|$.

Für jedes $b \in B$ zeigt die injektive Abbildung $K \hookrightarrow V$, $x \mapsto xb$, dass $|K| \leq |V|$.

Also gilt "$\geq$".

Betrachte die Abbildung $\bigcup_{n\geq 0} K^n \times B^n \twoheadrightarrow V$, $((x_i)_i, (b_i)_i) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i b_i$

Surjektiv $\Rightarrow |V| \leq \left|\bigcup_{n\geq 0} K^n \times B^n\right| = \left|\bigcup_{n\geq 0} (K\times B)^n\right| \overset{(c)}{=} |K \times B| = \max\{|K|, |B|\}$

da B unendlich.

qed.

Beweis Lemma 14: Sei B eine Basis von V.

Nach Lemma 13 bleibt zu zeigen: $|K| \leq \dim(V^\vee)$.

Wähle $b_0, b_1, \ldots \in B$ paarweise verschieden.

Zu jedem $x \in K$ assoziiere die Linearform $\ell_x : V \to K$ mit $\boxed{\ell_x(b_i) := x^i}$

und $\ell_x(b) := 0$ für alle $b \in B \setminus \{b_0, b_1, \ldots\}$

Beh.: Diese ℓ_x sind linear unabhängig.

Bew.: Seien $x_1, \ldots, x_n \in K$ paarweise verschieden, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ mit

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \ell_{x_i} = 0.$$

D.h. $\forall j: 0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ell_{x_i}(b_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^j$

Setze $A := (x_i^{j-1})_{i,j=1..n}$ $\Rightarrow A$ invertierbar.

$\Rightarrow \det(A) = \prod_{i<j} (x_j - x_i) \neq 0$.

$\Rightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cdot A = 0$. $\Rightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$

qed (Beh.)

Also ist $L := \{\ell_x \mid x \in K\}$ lin. unabhängig. Wähle Basis B' von $V^\vee$ $\Rightarrow |K| = |L| \leq |B'| = \dim(V^\vee)$. qed.